



GRUPE D'ANALYSE ET DE THÉORIE ÉCONOMIQUE LYON - ST ÉTIENNE



W P 1013

**Dépendance entre risques extrêmes :
Application aux Hedge Funds**

Ranoua Bouchouicha

Mai 2010

GATE Groupe d'Analyse et de Théorie Économique Lyon-St Étienne

93, chemin des Mouilles 69130 Ecully – France

Tel. +33 (0)4 72 86 60 60

Fax +33 (0)4 72 86 60 90

6, rue Basse des Rives 42023 Saint-Etienne cedex 02 – France

Tel. +33 (0)4 77 42 19 60

Fax. +33 (0)4 77 42 19 50

Messagerie électronique / Email : gate@gate.cnrs.fr

Téléchargement / Download : <http://www.gate.cnrs.fr> – Publications / Working Papers

Dépendance entre risques extrêmes : Application aux Hedge Funds

Ranoua Bouchouicha
bouchouicha@gate.cnrs.fr

Université de Lyon, Université Lyon 2, F-69007, Lyon, France

CNRS, GATE Lyon-St Etienne, UMR 5824, F-69130 Ecully, France

Téléphone +33(0) 472 86 60 21
Télecopie +33(0) 472 86 60 90

Résumé

Compte tenu de l'importance de l'étude de la dépendance extrême, nous avons essayé de déterminer l'approche qui semble être la meilleure pour l'étude des risques extrêmes. Pour atteindre ce but, nous avons mené une étude du coefficient de dépendance de queue pour les trois approches : paramétriques, semi-paramétriques et non paramétriques. Dans l'étude empirique, nous estimons le coefficient de dépendance de queue dans le cadre de ces différentes méthodes, d'abord par une implémentation numérique, ensuite par l'étude de dépendance entre le Hedge Fund Credit Suisse / Tremont Market Neutral et le S & P500 afin d'évaluer le degré de dépendance entre ces deux actifs, qui sont connus pour être décorrélés. Il existe peu d'études qui ont travaillé sur la dépendance non linéaire entre les Hedge Funds et l'indice du marché. L'article de Denuit et Scaillet (2004) traite d'un cas général de la détection de la dépendance du quadrant positif (PQD) entre les HFR et CSFB / Tremont Market Neutral et l'indice S & P 500 index. Le résultat de ce papier est pertinent car on trouve que le niveau de dépendance au niveau des pertes avec l'indice de marché est moins important que celui au niveau des gains, alors que les Hedge Funds l'indice du marché sont généralement considérés comme décorrélés.

Mots-clés : *Dépendance de queue, copules, estimation paramétrique, estimation non paramétrique, estimation semi-paramétrique*

Abstract

Given the importance of studying extreme risk dependence, we tried to determine the approach that seems to be the best for the study of extreme risks. To achieve this purpose, we conducted a study of the tail dependence coefficient for the three approaches: parametric, semi-parametric and nonparametric. In the empirical study, we estimate the tail dependence coefficient using these different methods, first on numerical data generated by a student distribution and then on the Credit Suisse / Tremont Market Neutral hedge fund indices and the S & P500 to assess the degree of dependence between these two assets, which are known to be uncorrelated. There are few studies that focused on the non-linear dependence between a hedge fund and market index. The article of Denuit et Scaillet (2004) deals with a general case of detection of positive quadrant dependence (PQD) between the HFR and CSFB/Tremont market neutral hedge fund indices and the S&P 500 index. The result of our paper is interesting since the level of dependence upon losses with the market index is less important than any upon gains, whereas the hedge fund and the market index are generally considered as uncorrelated.

Keywords: *tail dependence, Copulas, parametric approach, non parametric approach, semi-parametric approach.*

JEL Classification: *C14, C15, G1*

Introduction

Les crashes financiers et les crises représentent le phénomène des événements extrêmes en finance. Ces événements extrêmes nécessitent une modélisation et une analyse, étant donné que, à travers les pertes phénoménales, ces crashes peuvent ruiner les fonds d'investissement les plus riches. Cependant, une gestion des risques efficace ne peut se manifester par une étude individuelle du comportement de chaque actif. Ainsi apparaît l'importance de la diversification des portefeuilles et de l'étude de la dépendance. La structure de la dépendance entre les extrêmes est très importante dans le domaine de la finance. En effet, c'est un outil indispensable pour la composition et la sélection des portefeuilles, dans la détermination des prix des options dans l'analyse de risque de crédit (Poon et al., 2004). En effet, le gestionnaire de portefeuille essaiera d'investir dans les actions qui présentent plutôt une indépendance au niveau des queues afin de réduire les grandes pertes.

Une valeur élevée de la probabilité jointe de l'occurrence du risque indique une grande exposition au risque systématique pendant les crises financières. Pour réduire un tel risque un investisseur essaiera de choisir des actifs qui auront une probabilité jointe nulle ou la plus faible possible. L'étude de la dépendance est donc primordiale pour sélectionner le portefeuille qui est le moins vulnérable aux pertes. La dépendance entre les rendements des actifs financiers a significativement augmenté durant ces dernières années et la crise financière que le marché financier a connue dernièrement est la preuve la plus concrète qu'on puisse avoir de cette dépendance entre les actifs, surtout en période de récession. En 2008, le Fonds monétaire international a chiffré à 945 milliards de dollars le coût de la crise au début de l'année pour le système financier mondial, dont 565 milliards générés par l'exposition des banques aux "subprimes", les prêts immobiliers à risque aux Etats-Unis. Plusieurs études empiriques se sont intéressées à l'augmentation de la dépendance entre les actifs en période de crise : Karolyi et Stulz (1996), Longin et Solnik (2001), Campbell, Koedijk, et Kofman (2002) et Malevergne et Sornette (2005)¹. Etant donné que cette croissance au niveau de la dépendance affecte la rentabilité, ceci donne un motif pour la diversification des portefeuilles

¹ « Extreme Financial Risks », 2005 Chapitre 6

en considérant la dépendance et en se basant soit sur la corrélation positive et négative entre les actifs, soit sur d'autres moyens, plus efficaces, qui déterminent la dépendance des queues.

Le modèle gaussien est inadéquat pour quantifier les risques extrêmes qui se manifestent par exemple au niveau de la combinaison entre les distributions marginales des rendements. Ainsi, la covariance, donne une idée limitée des risques extrêmes joints (Embrechts et al., 1999). Par conséquent, la corrélation qui joue un rôle central dans la théorie moderne du portefeuille peut conduire à des conclusions trompeuses quant au rôle de quelques actifs dans la diversification du portefeuille. En effet, les Hedge Funds ou les fonds alternatifs, sont considérés comme des actifs qui sont décorrélés de l'indice du marché, d'où leur caractéristique connue de diversification au sein d'un portefeuille. Néanmoins cette caractéristique qui leur est attribuée se base sur le coefficient de corrélation qui ne caractérise qu'une dépendance linéaire et dans un cadre gaussien, alors qu'il apparaît que les Hedge Funds ont plutôt des distributions leptokurtiques. En outre, l'étude de Denuit et Scaillet (2004) a révélé l'existence d'une dépendance de quadrant positif (PQD) entre les deux fonds alternatifs le « CSFB/Tremont Market Neutral », le HFR et l'indice de marché S&P500. Nous avons donc trouvé intéressant d'étudier la dépendance entre un fonds de Hedge Fund et l'indice de marché, mais à travers une forme locale de PQD connue sous le nom de coefficient de dépendance de queue. Ce coefficient a fait l'objet de plusieurs recherches ce qui a conduit à plusieurs approches pour son estimation.

L'enjeu de ce papier est de comparer les estimations issues de ces différentes approches afin de voir laquelle s'avère la plus pertinente, et d'analyser la dépendance entre le fonds alternatif « Credit suisse / Tremont Market Neutral » et l'indice S&P500. Pour répondre à cette question de recherche, ce travail est conçu en deux parties : la première est consacrée à l'aspect théorique de l'étude introduisant les concepts et les notions de base ainsi que les différentes approches d'estimation de la dépendance de queue. La deuxième est consacrée à une étude empirique pour évaluer les estimateurs des différentes méthodes et ceci à travers une implémentation numérique en premier lieu et sur des données réelles en second lieu.

1. Cadre Théorique

1.1 La notion de dépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes si les informations concernant l'une ne donnent aucune information sur l'autre:

$$P(X \leq x|Y) = P(X \leq x) \quad (1)$$

Mesurer la dépendance entre deux variables aléatoires X et Y revient à avoir un indicateur ou une fonction qui résume l'ensemble de la structure de dépendance en un scalaire. Le coefficient de corrélation linéaire est une mesure relativement simple qui donne une idée sur la structure de dépendance entre deux variables aléatoires, étant donné qu'elle se base sur la covariance qui est une mesure linéaire et relativement facile à manipuler. Puisque le coefficient de corrélation est construit comme une moyenne de déviation par rapport à la moyenne, elle ne permet pas de distinguer entre les rendements positifs et négatifs. L'hypothèse sur laquelle elle se base est que la distribution est gaussienne et linéaire ce qui peut sous estimer le risque. En effet, Embrechts *et al.* (1999) ont montré que pour deux distributions marginales F_X et F_Y , dans le cas de distributions elliptiques, le coefficient de corrélation varie entre -1 et 1 en considérant l'égalité suivante:

$$\text{cov}(X, Y) = \iint (F(x, y) - F_X(x)F_Y(y)) dx dy \quad (2)$$

Alors la corrélation minimum ρ_{\min} et maximum ρ_{\max} sont atteintes respectivement quand les deux variables sont contre-monotones et monotones. Embrechts *et al.* (1999) ont bien illustré la limite du coefficient de corrélation en calculant la corrélation maximale et minimale pour deux variables log-normales : $X \sim \log N(0, 1)$ et $Y \sim \log N(0, \sigma^2)$.

Les deux bornes du coefficient de corrélation sont données par :

$$\rho_{\min} = \rho(e^Z, e^{-\sigma Z}), \text{ et } \rho_{\max} = \rho(e^Z, e^{\sigma Z}) \quad (3)$$

Les deux bornes du coefficient de corrélation tendent rapidement vers 0 quand σ croît, ceci montre bien la limite de cette mesure : on peut bien avoir des variables co-monotones mais qui ont une faible corrélation, alors que dans le cadre du coefficient de corrélation linéaire on prétend toujours que si les deux variables sont co-monotones c'est une forme de dépendance positive (voir *Fig. a*).

La limite du coefficient de corrélation linéaire est due au fait qu'il agrège toute l'information dans le comportement marginal de chaque variable aléatoire. À ceci s'ajoute la limite de sa modélisation dans un cadre gaussien qui ne donne qu'une idée incomplète du risque, alors que pour étudier les risques, on devrait s'intéresser aux distributions marginales à queues épaisses car c'est à ce niveau que les grands risques interviennent. Il s'avère donc plus pertinent d'étudier la dépendance d'une distribution jointe, qui contient une description du comportement marginal de chaque variable étant donné que le fait de ne pas prendre en compte les distributions marginales peut fausser la structure de dépendance. L'un des outils qui décrit ce comportement est le coefficient de dépendance de queue qui sera développé par la suite.

1.2. Mesure de dépendance extrême : la dépendance de queue

Dans cette partie, nous nous intéressons à la notion des copules car c'est un concept très important pour l'étude de dépendance des extrêmes. Les copules présentent un outil statistique très intéressant car elles s'intéressent aux distributions multivariées et permettent d'analyser les distributions de probabilités jointes présentant des caractéristiques statistiques moins restrictives telles que les distributions leptokurtiques, asymétriques. Les copules autorisent même le travail sur des distributions multivariées puisqu'elles permettent de décomposer les lois multidimensionnelles en leurs lois marginales univariées et en une fonction de dépendance. Les copules donnent alors une description claire et précise de la structure de dépendance qui existe entre les variables aléatoires en se concentrant sur les distributions marginales.

▪ Théorème de Sklar

Soit F une fonction de répartition n -dimensionnelle avec des distributions marginales F_1, \dots, F_n continues. Il existe une unique n -copule $C : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ tel que :

$$F(X_1, \dots, X_n) = C(F_1(X_1), \dots, F_n(X_n)) \quad (4)$$

Ainsi la copule combine les distributions marginales F_i pour former une distribution multivariée F , la fonction s'écrit alors comme suit et tel que F_i^{-1} ² est le quantile de la fonction de distribution F_i :

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)) \quad (5)$$

▪ Propriété d'invariance

Cette propriété fait de la fonction copule une mesure robuste sous l'hypothèse que les transformations faites sur les variables aléatoires sont strictement croissantes. (Schweizer et Wolf, 1981). Pour n variables aléatoires continues X_1, \dots, X_n de marges respectives F_1, \dots, F_n liées par une copule C , et soient h_1, \dots, h_n n fonctions croissantes alors :

$$C(F_1(h_1(X_1)), \dots, F_n(h_n(X_n))) = C(F_1(X_1), \dots, F_n(X_n)) \quad (6)$$

Ce résultat d'invariance montre que la copule est une mesure intrinsèque de dépendance entre les variables aléatoires contrairement au coefficient de corrélation. La copule sépare la structure de dépendance des fonctions de distributions multivariées de leurs fonctions de distributions marginales.

La notion de dépendance de queue donne une idée plus pertinente sur la survenue des risques simultanés au niveau des queues de distribution qui permet d'étudier l'occurrence concomitante des valeurs extrêmes. La dépendance de queue est une mesure locale contrairement aux mesures de concordance qui sont des mesures sur toute la distribution. Le coefficient de dépendance de queue mesure la probabilité que l'actif X subit une perte plus grande que X_q , associée au quantile q tendant vers zéro, conditionnée à la réalisation d'une perte de l'actif Y plus grande que Y_q associée au même quantile q . (Joe, 1997). Le coefficient de dépendance de queue supérieure s'écrit ainsi :

$$\lambda_u = \lim_{u \rightarrow 1} P[X > F_X^{-1}(u) | Y > F_Y^{-1}(u)] \quad (7)$$

De même la dépendance de queue inférieure est :

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} P[X < F_X^{-1}(u) | Y < F_Y^{-1}(u)] \quad (8)$$

² $F_i^{-1}(u) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid F_i(x) \geq u\}$ avec $u \in [0, 1]$ et F_i strictement croissante.

On peut aussi interpréter ce coefficient de dépendance différemment (Malevergne, 2005). Si X et Y représentent les volatilités de deux marchés différents, leur coefficient de dépendance indiquerait dans ce cas la probabilité que les deux marchés seraient affectés ensemble d'une forte volatilité.

Le coefficient de dépendance peut être aussi interprété en terme de Value-at-Risk (VaR), puisque les deux quantiles $F_X^{-1}(u)$ et $F_Y^{-1}(u)$ représentent les VaR si pour le coefficient de dépendance supérieur on comptait les pertes comme positives. Dans ce cas le coefficient de dépendance, λ_u par exemple donne la probabilité que X et Y excèdent leurs VaR au seuil u quand $u \rightarrow 1$, et asymptotiquement cette probabilité est donnée par $\lambda_u \cdot (1-u)$. On remarque alors que la dépendance de queue a en fait la propriété d'une copule car elle présente une indépendance des marges des variables. Ainsi, et en prenant le cas bivarié de deux variables X et Y , tel que C est leur copule, le coefficient de dépendance de queue peut être exprimé comme suit:

$$\lambda_u = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \quad (9)$$

Si $\lambda = 0$ alors les extrêmes sont indépendants, si $\lambda = 1$ les extrêmes sont parfaitement corrélés et si $0 < \lambda < 1$ les extrêmes sont dépendants. Cependant ce résultat n'est pas toujours vrai : une indépendance implique forcément une indépendance au niveau des queues de distribution mais le contraire n'est pas toujours vrai. Ceci entre dans le cadre de la considération du degré de dépendance asymptotique. Cet aspect a été développé par Poon et al. (2004) dans leur article. En effet, ils ont présenté une mesure complémentaire au TDC qui a été introduite par Ledford et Tawn (1996) et puis développée par Coles, Heffernan et Tawn (1999) qui est définie ainsi

$$\bar{\chi} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{2 \log P[X > F_X^{-1}(u)]}{\log P[X > F_X^{-1}(u), Y > F_Y^{-1}(u)]} - 1 \quad (10)$$

Les deux mesures λ et $\bar{\chi}$ mesurent le degré de dépendance ou d'indépendance asymptotique. Ces mesures sont proches de la mesure coskewness³.

³ Cette mesure ne s'intéresse qu'aux réalisations qui varient dans le même sens.

La copule de queue est une fonction qui décrit la structure de dépendance d'une distribution jointe dans la queue et qui est définie comme suit $\Lambda: \mathbb{R}_+^{-2} \rightarrow \mathbb{R}_+$:

$$\Lambda_U = \lim_{t \rightarrow \infty} tP\left(X > F_X^{-1}(1-x) \mid t, Y > F_Y^{-1}(1-y) \mid t\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} t\bar{C}(x \mid t, y \mid t) \quad (11)$$

La copule de queue est une mesure intéressante car que c'est une généralisation du coefficient de dépendance de queue ⁴ qui décrit la structure de dépendance extrême. Schmidt et Stadtmüller (2006) proposent cette mesure comme un moyen d'obtenir une faible convergence du coefficient de dépendance de queue dans un modèle de distribution non paramétrique, et pour construire une distribution multivariée des valeurs extrêmes. Cette approche non paramétrique sera présentée dans la partie qui suit.

1.3 . Estimation de la dépendance de queue

Il y a trois principales manières pour estimer un coefficient de dépendance de queue. La première, dite paramétrique, se basant sur l'hypothèse que la structure de dépendance entre les variables est représentée par une copule archimédienne et que la limite du théorème de Juri et Wüthrich (2002) permet d'estimer la dépendance de queue. La deuxième est basée sur le modèle à facteurs reliant les distributions marginales des variables, elle est dite semi-paramétrique (Malevergne et Sornette, 2004). La troisième est non paramétrique. Dans ce sens il y a eu beaucoup d'études qui ont essayé de présenter des estimateurs non paramétrique : certains sont basés sur l'estimation empirique de la copule de queue (Schmidt et Stadtmüller (2006)). D'autres se basent sur la transformation des variables aléatoires de départ en variables aléatoires de Fréchet (Poon *et al.* (2004)).

▪ Approche paramétrique

Dans leur article Frahm *et al.* (2005) ont surtout essayé de présenter une estimation non paramétrique de la dépendance de queue ; mais ils ont présenté aussi des approches paramétriques se basant sur le degré d'information sur les distributions des variables. Ils ont présenté une estimation via une distribution spécifique, une copule spécifique et une classe de copule. Cette dernière démarche est la plus générale des trois et elle est basée sur le résultat de Juri et Wüthrich (2002) relatif aux copules archimédiennes. Dans le cadre de l'estimation, en utilisant une classe de distribution, les auteurs ont considéré la classe des distributions elliptiques. Mais la limite de cette méthode est que le cadre des copules elliptiques ne tient

⁴ $\lambda_u = \Lambda_U(1,1) = \lim_{t \rightarrow \infty} tC(1 \mid t, 1 \mid t)$

que dans le cas où la queue supérieure et inférieure sont égales. Alors que, a priori, les investisseurs n'ont pas le même comportement vis-à-vis des pertes et des gains. Néanmoins l'étude empirique menée par Malevergne et Sornette (2004) montre un comportement similaire entre les deux queues positives et négatives. Cet argument pourrait renforcer l'étude de la dépendance de queue sous l'hypothèse des distributions elliptiques.

L'estimation de la dépendance de queue sous l'hypothèse de copule spécifique a été introduite par Longin et Solnik (2001), Malevergne et Sornette (2003), et Patton (2001). Mais la limite de cette méthode est qu'il faut choisir les paramètres de la copule avant de s'assurer que les variables présentent ou non une dépendance de queue. Dans le cadre de la présentation d'une approche paramétrique de la dépendance de queue, on va présenter celle qui correspond à un cadre plus général, puisqu'elle utilise toute une classe de copule, à savoir la classe des copules archimédiennes. Les copules archimédiennes⁵ ont un double avantage : $(X, Y) \text{ STmk } Y$ outre le fait que la plupart de ces copules ont une expression analytique, elles permettent de prendre en compte un large éventail de structure de dépendance. La limite vers laquelle tend la copule archimédienne établie par Juri et Wüthrich (2002) permet d'estimer la dépendance de queue.

En considérant la fonction suivante

$$F_t(x) = \frac{C\{\min(x, t)\}}{C(t, t)} \quad \forall 0 \leq x \leq 1 \quad (12)$$

La copule associée à cette fonction est

$$C_t(u, v) = \frac{C\{F_t^{-1}(u), F_t^{-1}(v)\}}{C(t, t)} \quad (13)$$

Elle tend vers une copule de Clayton quand u tend vers zéro sous l'hypothèse que la copule possède une fonction génératrice φ ⁶ à variations régulières et ainsi le coefficient de dépendance de queue inférieure peut s'exprimer en fonction du paramètre de la copule

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} C_t(u, v) = C_{cl}(u, v, \theta) \quad \text{avec } \theta > 0 \quad (14)$$

⁵ Une copule archimédienne se définit par: $C(u, v) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) & \text{si } \varphi(u) + \varphi(v) \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

⁶ $\varphi_t(x) = \varphi(F_t^{-1}(x)) - \varphi(t) = \varphi(x \cdot \varphi^{-1}(2\varphi(t))) - 2\varphi(t)$

$$\lambda_L = 2^{-1/\theta} \quad (15)$$

- Approche semi- paramétrique du coefficient de dépendance de queue sous le modèle à facteur

Dans leur article, Malevergne et Sornette (2004) ont proposé une nouvelle approche qui ne se base pas directement sur la théorie des valeurs extrêmes mais essaye d'analyser la structure de dépendance extrême à partir des caractéristiques du modèle des actifs financiers. Ce choix est pertinent, car ces modèles sont très utilisés en finance en intégrant dans leur analyse les rendements, le taux d'intérêt, le modèle de risque de crédit. Le modèle à facteur est bien évidemment représenté par le modèle d'évaluation des actifs financiers (CAPM) (Sharpe (1964), Lintner (1965), Mossin (1966)) ou « l'arbitrage pricing theory » (APT) (Ross 1976). En considérant comme facteur explicatif le rendement du marché, les auteurs ont essayé de caractériser la structure de dépendance extrême entre les rendements des actifs et le rendement du marché. En effet, selon certaines études comme celle de Ross (1988), pendant les crises financières, (crash de 1987 par exemple), l'indice de marché était le seul facteur explicatif et représentatif des mouvements de la bourse et de la propagation de la crise. Le coefficient estimé par une approche non- paramétrique ou semi- paramétrique ne demande pas une spécification explicite de la structure de dépendance entre les actifs comme dans les études antérieures (Longin et Solnik, 2001 ; Malevergne et Sornette, 2003 ; Patton, 2001).

En considérant le modèle des facteurs suivant :

$$X = \beta Y + \varepsilon \quad (16)$$

X et Y sont deux variables aléatoires, β est le coefficient du modèle CAPM.

En prenant comme hypothèse que le facteur Y a une distribution « rapide », comme le cas des distributions gamma gaussiennes ou exponentielles. Dans ce cas le coefficient de dépendance de queue est égal à zéro. Ce résultat est évident dans la cas où le facteur Y et le bruit ε sont normalement distribués car dans ce cas, la copule de la distribution jointe de (X, Y) a un coefficient de dépendance de queue nul. Cependant pour les facteurs qui ont une distribution à variations régulières telle que la distribution de Student, cette distribution se caractérise par le fait que le bruit ε ne peut pas avoir une distribution à queue plus épaisse que le facteur pour garantir ainsi une dépendance de queue⁷. En prenant comme exemple la distribution de Student $T(\nu)$, sachant que le facteur Y et le bruit ε ont le même degré de liberté ν , σ est le

⁷ si $\alpha_\varepsilon > \alpha_Y$ alors $\lambda = 0$ et si $\alpha_\varepsilon < \alpha_Y$ alors $\lambda = 1$

facteur d'échelle de \mathcal{E} et celui de Y est égal à 1 par hypothèse. Le coefficient de dépendance est alors :

$$\lambda = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sigma}{\beta}\right)^{\nu}} \quad \text{avec } \beta > 0 \quad (17)$$

Ce résultat est très important car il fournit une interprétation de comment se comporte le risque des co-mouvements en fonction des 3 paramètres qui définissent le modèle à facteurs, ce qui permet de quantifier l'impact de ces paramètres sur les risques mesurés par le coefficient de dépendance de queue, faisant ainsi un lien étroit entre le modèle de l'équilibre des actifs financiers par exemple et les risques extrêmes multivariés. D'après l'expression (17), on remarque que le coefficient de dépendance de queue augmente quand β augmente et quand σ diminue, ce qui veut dire que la dépendance de queue diminue quand la volatilité de l'actif augmente. On remarque aussi que quand ν tend vers l'infini et que $\sigma > \beta$ le λ tend vers zéro, et si $\sigma < \beta$, le coefficient λ tend vers un. Ce résultat peut paraître un peu surprenant car on pourrait s'attendre à ce que le coefficient tende vers zéro dans tous les cas, étant donné que quand ν tend vers l'infini, la loi de Student tend vers une Gaussienne, qui se caractérise par un coefficient de dépendance de queue qui est nul.

Sous l'hypothèse que le facteur et les résidus ont des distributions avec des lois puissantes, ceci permet d'estimer le coefficient de dépendance par une approche paramétrique. Cette approche permet une estimation plus précise du ratio des quantiles à condition que la forme paramétrique caractérisant la distribution soit proche de la vraie distribution. Le coefficient de dépendance de queue s'écrit alors de la façon suivante : C^8 est le facteur d'échelle

$$\lambda = \frac{1}{1 + \left(\frac{\mathcal{E}_{k,N}}{\beta y_{k,N}}\right)^{\alpha}} \quad (18)$$

▪ Approches non paramétriques

Le premier estimateur est celui présenté par Frahm *et al.* (2005). Ils se sont intéressés à la notion de la dépendance de queue à travers le concept des copules qui prennent en considération la structure de dépendance pour les fonctions de distribution multivariées. Pour

⁸ $\overline{F}_y(y) \sim C_y \cdot y^{-\alpha}$ et $\overline{F}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}) \sim C_{\mathcal{E}} \cdot \mathcal{E}^{-\alpha}$

cette estimation non paramétrique, il n'y a pas d'hypothèses paramétriques concernant les copules et les fonctions de distribution marginales. Le coefficient de dépendance de queue (TDC) est obtenu à travers la copule empirique \hat{C}_n . La copule empirique est définie par la relation suivante entre les fonctions de distribution empirique \hat{F}_n , \hat{G}_n et \hat{H}_n

$$\hat{F}_n(x, y) = \hat{C}_n\left\{\hat{G}_n(x), \hat{H}_n(x)\right\} \quad (19)$$

La première forme du TDC empirique est en fonction du copule empirique qui a été introduite par Coles *et al.*(1999). Cet estimateur est obtenu à travers la relation (9), et si $u \rightarrow C(u, u)$ est différentiable sur l'intervalle $(1-\varepsilon, 1)$ alors

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1-C(u, u)}{1-u} = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{dC(u, u)}{du} = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{\log C(u, u)}{\log u} \quad (20)$$

Ce qui donne au coefficient de dépendance de queue la forme suivante

$$\hat{\lambda}_U^{LOG} = 2 - \frac{\log C_m\left(\frac{m-k}{m}, \frac{m-k}{m}\right)}{\log\left(\frac{m-k}{m}\right)}, \quad 0 < k < m \quad \bar{\chi} \quad (21)$$

À savoir que C_m est la copule empirique. Il est important de noter que le choix de la fonction de répartition empirique des distributions marginales permet d'éviter toute erreur d'identification en raison d'un mauvais ajustement des paramètres de ces distributions. La deuxième forme du coefficient de dépendance non paramétrique a été présentée par Joe *et al.* (1992).

$$\hat{\lambda}_U^{SEC} = 2 - \frac{1-C_n\left(\frac{n-k}{n}, \frac{n-k}{n}\right)}{1-\left(\frac{n-k}{n}\right)}, \quad 0 < k < n^9 \quad (22)$$

En effet, la normalité asymptotique et la forte consistance de cet estimateur ont été discutées dans Schmidt et Stadtmüller (2006). Dans cet article, les deux auteurs ont aussi présenté l'estimateur non paramétrique en fonction de la copule de queue présentée dans la première partie. Ainsi les estimateurs de dépendance de queue inférieure se présentent respectivement dans l'équation suivante, cet estimateur fait référence à la copule de queue déjà introduite.

⁹ $C_m(u, v) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m 1_{(R_{1j}/m \leq u, R_{2j}/m \leq v)}$ est la copule empirique, avec R_{1j} et R_{2j} sont les rangs dans les blocs de maxima de X_n et Y_n , m détermine le nombre de maxima dans chaque bloc, le seuil est noté par k .

$$\Lambda_{L,m}(x, y) = \frac{m}{k} C_m \left(\frac{kx}{m}, \frac{ky}{m} \right) \approx \frac{1}{k} \sum_{j=1}^m 1_{\{R_{m1}^{(j)} > kx \text{ et } R_{m2}^{(j)} > ky\}} \quad (23)$$

Il faut bien noter que les estimateurs présentés ne sont appropriés que pour les distributions jointes extrêmes du fait qu'ils se basent sur la copule empirique. Ils présentent l'avantage d'éviter l'erreur d'identification de la distribution ou de la copule qui pourrait donner une estimation fallacieuse de la dépendance de queue.

Une autre approche d'estimation non paramétrique de la dépendance de queue est celle de Poon et Rockinger (2004) qui consiste en la transformation des variables X et Y en des variables aléatoires de Fréchet notées par S et T telles que respectivement suivant le résultat de Ledford et Tawn (1996, 1998)¹⁰

$$S = -1/\log F_X(X) \text{ et } T = -1/\log F_Y(Y) \quad (24)$$

En considérant la variable $Z = \min\{S, T\}$, la fonction de survie de L s'écrit ainsi

$$P(Z > z) = L(z) z^{-1/\eta} \quad \forall z > u \quad (25)$$

sous l'hypothèse que $L(z)$ est une fonction à variations lentes¹¹. $0 < \eta \leq 1$ peut être estimée par l'estimateur de Hill. La mesure $\bar{\chi}$ a été présentée dans le chapitre précédent par l'équation (10). L'estimateur de $\bar{\chi}$ peut s'écrire comme suit :

$$\hat{\bar{\chi}} = \frac{2}{n_u} \left(\sum_{j=1}^{n_u} \log \left(\frac{z_j}{u} \right) \right) - 1 \quad (26)$$

Dans le cas de dépendance asymptotique les $\bar{\chi} = 1$ et le degré de dépendance est donné par $\chi > 0$. Si $\hat{\bar{\chi}} < 1$ alors les variables sont asymptotiquement indépendantes et on considère que $\chi = 0$, et seulement dans le cas où on ne peut pas rejeter le fait que le $\bar{\chi} = 1$ alors on estime le χ à travers la méthode du maximum de vraisemblance¹².

¹⁰ $P(S > s, T > t) \sim L(s) s^{-1/\eta}$ quand $s \rightarrow \infty$

¹¹ $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{L(uz)}{u} = 1$ pour $z > 0$

¹² $L(z) = \frac{n_u}{n} u^{1/\hat{\xi}}$ avec $\hat{\xi} = \frac{1}{n_u} \sum_{j=1}^{n_u} \log \left(\frac{z_j}{u} \right)$

Donc, l'estimateur de χ s'écrit ainsi

$$\hat{\chi} = \frac{un_u}{n} \quad (27)$$

avec n_u qui est le nombre des observations de la variable Z qui excède le seuil u . Une valeur élevée de χ indique une exposition élevée au risque systématique surtout pendant les crises. Pour réduire ce risque systématique, un gestionnaire de fonds devrait investir dans des fonds qui ont un $\chi = 0$ et $\bar{\chi} < 0$. Plus la valeur de $\bar{\chi}$ est faible meilleure est la diversification. Le fait de combiner les actifs qui sont asymptotiquement indépendants réduit le risque du portefeuille.

2. Étude empirique

La gestion alternative est une stratégie visant à avoir un rendement absolu et décorrélié de l'indice de marché. Donc la caractéristique de la gestion alternative est qu'elle « parie » sur l'inefficience du marché pour produire des résultats à travers l'arbitrage de dysfonctionnement des marchés. En effet, on a choisi le fond d'arbitrage statistique « The Equity Market Neutral » qui fait recours à des modèles mathématiques pour essayer de détecter les anomalies de prix. Les fonds alternatifs sont donc reconnus pour être décorrélés et indépendants de l'indice du marché. Néanmoins, l'étude empirique élaborée par Denuit et Scaillet (2004) a détecté une dépendance de quadrant positif entre « l'indice CSFB/Tremont Market Neutral », le HFR et l'indice S&P500. C'est-à-dire que la probabilité que les deux actifs subissent des pertes simultanées n'est pas inférieure à la probabilité de perte qu'ils auraient s'ils étaient indépendants. En effet, une dépendance de quadrant positif notée (PQD¹³) est utilisée pour détecter si les stratégies sont neutres par rapport au marché à travers l'étude de dépendance non linéaire et extrême. Ce résultat empirique montre bien que le fait d'avoir un bêta, mesurant la dépendance linéaire, même faible, ne suffit pas pour assurer la neutralité face au marché. Dans cette partie empirique, on va étudier la dépendance entre un indice de fonds alternatif et un indice du marché mais à travers une étude locale de la dépendance de quadrant positif c'est-à-dire via le concept de la dépendance de queue qui traduit en fait une PQD mais à partir d'un certain seuil. On va estimer le coefficient de

¹³ $\forall x, y \in [0, 1], P[X \leq x, Y \leq y] \geq P[X \leq x]P[Y \leq y]$.

dépendance de queue à travers les différentes méthodes présentées dans la partie théorique, d'abord sur des données numériques générées à travers une loi de Student ,et ensuite, sur les données réelles de l'indice « Credit Suisse / Tremont Market Neutral » et le S&P500.

2.1. Implémentation numérique

▪ Estimation des coefficients bêta

On considère deux variables aléatoires X et Y , la relation entre les deux variables est définie par l'équation suivante :

$$Y = \beta X + \varepsilon \quad (28)$$

Afin de respecter les hypothèses de l'approche semi-paramétrique selon laquelle le facteur et le résidu ont des distributions de loi de puissance, on considère que le facteur X et le résidu ε ont une distribution de Student avec le même degré de liberté : 2.5, 3 et 5. On a choisi des degrés de liberté qui sont supérieurs à 2 vu que la variance d'une variable de Student¹⁴ n'est pas définie pour $\nu < 2$. Le coefficient β est obtenu par la méthode des moindres carrés ordinaires. Afin de tester une éventuelle dépendance entre le facteur et le résidu, on estime le tau de Kendall entre le facteur et le résidu et le coefficient de corrélation entre le carré du facteur et le résidu. Les valeurs sont faibles et même si la dépendance est significative à un seuil de confiance de 1%, ceci ne fausse pas les résultats, surtout du modèle des facteurs, étant donné que selon Malevergne et Sornette (2004) les résultats théoriques tiennent même en présence d'une faible dépendance entre le facteur et le bruit ε . Le tableau 1 décrit les caractéristiques statistiques des variables simulées. On a essayé de varier la taille de l'échantillon pour voir le comportement de la dépendance de queue. On a considéré un échantillon de 173, 500 et 1000 observations. On a choisi le plus petit échantillon de 173 pour voir la différence au niveau des estimations entre le coefficient de dépendance de queue des variables suivant une loi de Student et l'échantillon des données réelles de la deuxième partie qui a une taille de 173.

▪ Estimation de l'indice de queue

On estime l'indice de queue positive et négative de X, Y et ε par l'estimateur de Hill :

¹⁴ $V(X) = \frac{\nu}{\nu-2} \quad \forall \nu > 2$

$$\hat{\alpha} = \left[\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \log x_{j,N} - \log x_{k,N} \right]^{-1} \quad (29)$$

avec $x_{1,N} \geq x_{2,N} \geq \dots \geq x_{N,N}$ est l'échantillon ordonné des N observations x indépendamment, identiquement distribuées. L'estimateur de Hill a une distribution asymptotique normale avec une moyenne α et une variance α^2/k . Ces caractéristiques statistiques permettent de faire le test d'égalité des indices de queue entre Y , ε et X afin de déterminer le coefficient de dépendance de queue λ par la suite. On remarque que les indices de queue droite et gauche ont des valeurs proches et qui ne sont pas loin des degrés de liberté, ce qui confirme la bonne estimation des valeurs de α . Le test d'égalité des indices de queue entre Y , ε et X est presque vérifié au seuil de 5% pour toutes les observations sauf pour trois (tableau 2).

▪ Estimation du paramètre de la copule de Clayton

Selon l'approche paramétrique, le coefficient de dépendance de queue peut être estimé à travers la classe de copules archimédiennes, en considérant l'hypothèse que la copule archimédienne tend vers une copule de Clayton selon l'équation (14). Afin d'estimer paramètre θ de la copule de Clayton qui permet de calculer le coefficient de dépendance de queue comme l'indique l'équation (15), on procède par la méthode semi paramétrique proposée par Genest *et al.* (1995). Tandis que les méthodes de maximum de vraisemblance (MMV) et la méthode « Inference Functions Margins » (IFM) nécessitent une estimation paramétrique des marginales, la méthode semi paramétrique permet, à l'aide de la fonction de répartition empirique, de ne pas considérer cette contrainte en estimant les marginales de façon non paramétrique. Ainsi, le résultat est plus robuste selon qu'on connaît les distributions marginales ou non. La méthode se fait en deux étapes : on estime d'abord les marginales empiriquement à l'aide de la distribution empirique de l'échantillon et on obtient ainsi les fonctions de répartition empiriques \tilde{F}_X et \tilde{F}_Y de X et Y . Ensuite on estime le paramètre θ de la copule en maximisant la log-vraisemblance de la copule de Clayton :

$$l(u_X, u_Y, \theta) = \sum_{i=1}^n \ln(1 + \theta) - \ln(u_{Xi} * u_{Yi}) * (1 + \theta) - \left(2 + \frac{1}{\theta}\right) * \ln(u_{Xi}^{-\theta}) - (u_{Yi}^{-\theta} - 1) \quad (30)$$

en prenant comme valeur initiale la valeur déduite de la relation entre la copule de Clayton et

le tau de Kendall :

$$\theta_0 = \frac{2\hat{\tau}}{1 - \hat{\tau}}. \quad (31)$$

Les estimations par la méthode MMV et l'IFM ne sont pas robustes face à une erreur de spécification des distributions marginales. Par ailleurs, en utilisant l'approche semi paramétrique on ne risque de perdre aucune propriété statistique et il n'est pas nécessaire de modéliser les distributions marginales explicitement.

▪ Détermination du coefficient de dépendance de queue

Le coefficient de dépendance de queue sera estimé selon les approches développées dans la partie théorique à savoir, l'approche paramétrique, semi-paramétrique et non paramétrique. La méthode semi-paramétrique se base sur le modèle à facteur. Après avoir estimé le coefficient bêta et les indices de queue, le coefficient de dépendance de queue λ peut être obtenu à travers l'équation (17). Pour les estimateurs non paramétriques qui se basent sur la copule de queue selon les équations (21) (22) et (23) on choisit le m , qui désigne le nombre des blocs maxima dans l'échantillon, égal à N qui correspond à la taille totale étant donné que notre échantillon est petit. Pour des valeurs de bêtas indiquées dans le tableau 1 et qui sont en moyenne égales à 0.7, les estimations du coefficient λ donnent des valeurs qui sont homogènes pour toutes les méthodes sauf pour l'approche paramétrique qui donne des valeurs du coefficient qui sont très élevées. Les estimations illustrées dans le tableau 3 et par la figure 6, permettent de conclure que l'approche semi-paramétrique, étant donné que ses valeurs estimées sont proches des valeurs issues de l'approche non paramétrique, est robuste et que le modèle à facteur permet de bien estimer la dépendance de queue entre les actifs. Même pour les deux cas (tableau 3) pour lesquels l'estimateur $\bar{\chi}$ n'est pas significativement égal à 1 indiquant une indépendance asymptotique, le coefficient de dépendance de queue de l'estimation semi-paramétrique est très faible. Concernant les résultats de l'approche paramétrique qui ne coïncident pas avec les autres estimations, ceci peut être dû au fait que les variables suivant une loi de Student ne peuvent pas être modélisées par une copule archimédienne.

Pour voir si la dépendance linéaire exprimée par le bêta a un impact sur les estimations, on a considéré un bêta plus élevé de l'ordre de 2.51 en moyenne. Les résultats sont résumés au tableau 4. L'estimateur non paramétrique $\hat{\Lambda}_{U,m}^{\wedge}(1,1)$ basé sur la copule de queue a des valeurs qui sont plus proches des valeurs données par la copule de Clayton. On pourrait conclure que si les actifs se caractérisent par une dépendance élevée, une copule archimédienne peut être appropriée pour modéliser leurs marginales. Les valeurs élevées et significativement différentes de 1 de $\bar{\chi}$ confirment la forte dépendance asymptotique. Selon

les résultats des deux tableaux 3 et 4, on peut confirmer la constatation théorique relative au modèle des facteurs selon laquelle quand ν augmente et que σ est supérieur à β , le coefficient de dépendance de queue tend vers zéro (cas du tab.3). Alors que si σ est inférieure à β (tab .4), le coefficient de dépendance de queue tend vers 1. Et les autres estimations selon les autres approches confirment ce résultat.

Afin d'évaluer la variance des estimations, on a utilisé la méthode de Bootstrap à 1000 itérations pour le cas où les coefficients bêta sont plus élevés, étant donné que les dépendances de queue sont plus élevées ce qui permet de mieux voir l'impact de la taille et le biais des estimations. On a considéré la plus petite taille qui correspond à 173 observations et la taille de 1000. Le tableau 5 résume les moyennes des estimations et les écarts types. En effet, l'estimateur semi-paramétrique a un écart type plus élevé pour les deux tailles alors que les deux autres approches ont des valeurs d'écart type qui sont proches et moins élevées. Ceci renforce le résultat déjà trouvé selon lequel les variables qui se caractérisent par une forte dépendance et même un bêta élevé peuvent être modélisées asymptotiquement par une copule de Clayton. En ce qui concerne l'effet de la taille, on remarque que la valeur des écarts types diminue avec la taille surtout pour les deux approches non paramétrique et paramétrique, ceci est due au fait qu'on dispose de plus de valeurs extrêmes pour un grand échantillon, ce qui permet une meilleure estimation.

2.2. Etude de la dépendance de queue entre un fond alternatif et l'indice de marché

▪ Présentation des données

Cette étude porte sur l'indice des Hedge Funds « Credit suisse / Tremont Market Neutral » et l'indice S&P500 qui est bien diversifié et représente environ 80% de la capitalisation totale du marché. Les données consistent en des rendements mensuels qui s'étalent sur la période allant du 31/12/1993 au 31/5/2008 représentant ainsi 173 observations. Le tableau 6 présente les statistiques caractérisant les données. Avec des rendements moyens presque égaux, l'indice S&P500 a un écart type plus élevé que celui de l'indice des Hedge Fund ce qui le rend plus volatile. En effet, il atteint un rendement minimal de l'ordre de -14.58%. La figure 1 montre la répartition des rendements des deux actifs.

Tableau 6. Les statistiques des deux actifs

	Y	X
Moyenne	0.7928	0.719
écart type	0.8064	4.0271
Kurtosis	3.5112	3.7362
min	-1.15%	-14.58%
max	3.26%	9.67%
Y:CS/Tremont Market neutral		
X: indice S&P500		

La figure 2 illustre le comportement des deux indices dans le même plan. L'indice de Crédit Suisse et le S&P500 ont un $\rho = 0.3595$ et un $\tau = 0.2106$ malgré leur classe de « Market Neutral ». On remarque qu'ils présentent aussi une faible dépendance linéaire avec un $\beta = 0.0719$, alors que les deux actifs peuvent bien présenter une dépendance non linéaire comme Denuit et Scaillet (2004) l'ont montré dans leur article.

▪ Estimation de l'indice de queue

L'estimation de l'indice de queue se fait par l'estimateur de Hill exprimé par l'équation (29). La figure 3 montre la représentation des deux estimateurs de Hill pour la queue droite de l'indice de marché et du Hedge Fund, la valeur de l'indice α correspond à la valeur à partir de laquelle la courbe commence à se stabiliser. Les valeurs des indices de queue droite et gauche figurent dans le tableau 7. L'hypothèse H_0 est vérifiée au seuil de 5 % confirmant l'égalité entre les indices de queue de l'indice du Hedge Fund, du résidu de la régression de l'indice du marché. Cependant, la queue droite (gains) a un indice α plus élevé que celui des pertes et ceci pour les deux actifs.

▪ Estimation de la dépendance de queue

Comme pour l'implémentation numérique, on applique les trois approches paramétrique, non paramétrique et semi-paramétrique. Pour l'approche paramétrique, on estime le paramètre de

la copule par la même méthode semi-paramétrique déjà employée. La figure 4 illustre l'une des deux fonctions de répartition empiriques des deux actifs, utilisée pour estimer le paramètre de la copule $\hat{\theta}$. Pour une valeur de τ de Kendall égale à 0.2106 entre l'indice du marché et l'indice du Hedge Fund, la valeur θ_0 de la copule de Clayton est égale à 0.5333 permettant d'avoir une valeur $\hat{\theta}$ égale à 0.3477 résultante de la méthode de maximum de log-vraisemblance de la copule. Pour l'estimation du coefficient de dépendance de queue selon l'approche non paramétrique par les équations (21), (22) et (23), on choisit le paramètre m , qui désigne le nombre des blocs maxima dans l'échantillon, égal à la taille de l'échantillon comme pour l'implémentation numérique. En ce qui concerne l'estimateur non paramétrique de l'équation (26) et (27) le $\bar{\chi}$ détecte la nature de la dépendance asymptotique entre les deux actifs. En effet, pour les deux queues droite et gauche, le $\bar{\chi}$ n'est pas significativement différent de 1, indiquant ainsi une dépendance asymptotique entre le S&P500 et le « CS/Tremont Market Neutral ». Le tableau 8 résume les estimations des coefficients de dépendance de queue. En effet, on remarque que les estimateurs donnent des valeurs qui concordent. Même avec l'approche paramétrique, les valeurs estimées du λ coïncident avec les valeurs issues des autres estimations, contrairement aux estimations des variables suivant une loi de Student. Ceci pourrait confirmer le fait que la distribution des marginales des deux actifs considérés peut être modélisée par une copule archimédienne.

Afin d'estimer les écarts types des coefficients λ résumés dans le tableau 8, on a eu recours à la méthode de Bootstrap à 1000 itérations en fixant les indices de queue droite et gauche respectivement à 4 et 2 en se basant sur les résultats de l'estimation du tableau 6. Les coefficients de dépendance de queue relatifs à l'approche non paramétrique, qui se basent sur la notion de copule de queue, et à l'approche paramétrique sont caractérisés par des variances plus élevées, étant donné que l'échantillon est petit et que les valeurs extrêmes ne sont pas nombreuses. Alors que les estimateurs semi paramétrique et non paramétrique de Poon *et al.* (2004) ont des variances qui sont faibles étant donné que le cadre de l'estimation est caractérisé par des hypothèses plus restrictives que les autres estimateurs à variance élevée. Selon les résultats empiriques, on remarque que la dépendance de queue droite est plus élevée que celle de la queue gauche (figure 5). En effet, la queue gauche présente une valeur de $\bar{\chi}$ inférieure à la valeur correspondante à la queue droite, ce qui confirme les résultats des estimations des autres méthodes pour lesquelles on a trouvé que la queue des

perdes présente une plus faible dépendance de queue que la queue des gains. Cette asymétrie au niveau de la dépendance de queue est due aussi au fait que l'indice de queue des gains est plus épais que celui des pertes. C'est une des raisons pour lesquelles la dépendance de queue gauche est moins élevée que celle de la queue droite. En effet, pour l'étude faite sur les variables qui suivent une loi de Student, on a remarqué que pour des indices de queue qui étaient presque égaux, les coefficients de dépendance de queue droite et gauche avaient des valeurs qui sont proches les unes des autres.

D'après une estimation moyenne entre les 3 approches, il y a 32.028% de chance que l'indice du Hedge Fund réalise un gain quand l'indice du marché S&P500 enregistre des rendements positifs, alors qu'il y a 12,19% de chance en moyenne que l'indice du Hedge Fund subisse des pertes quand celui du marché est en mauvaise phase. Ce comportement de dépendance donne un aspect de couverture pour les fonds alternatifs, qui sont certes parfois risqués, mais qui peuvent être utilisés comme des instruments d'assurance et de couverture contre le risque de perte. Pour un investisseur averse au risque, investir dans des actifs qui présentent une dépendance au niveau des extrêmes est moins favorable que s'ils étaient indépendants. Ainsi la prime de risque est plus élevée dans le cas de dépendance. Selon Denuit et Scaillet (2004), dans le cas où X et Y se caractérisent par une dépendance de quadrant positif (PQD)¹⁵ et que la fonction :

$$f : x \mapsto -(x - k)_+ \quad \text{avec } (.)_+ = \max\{0, .\} \quad (32)$$

est concave $\forall k \in \mathbb{R}$, l'inégalité

$$E(X + Y - k)_+ \geq E(X^\perp + Y^\perp - k)_+ \quad (33)$$

est vraie $\forall k$. Pour un portefeuille d'actifs $(X+Y)$, ce résultat peut être appliqué au prix d'un call C^{16} portant sur X et Y et tel que k est son prix d'exercice. Donc dans notre cas, puisque l'indice du marché et le fonds alternatif sont caractérisés par une dépendance de queue, qui est en fait une PQD locale, un call portant sur un panier formé par ces deux actifs sera sous-évalué. Dans ce cas, si l'investisseur prend une position d'achat de call, il sera gagnant en cas

¹⁵ $\forall x, y \in [0, 1], P[X \leq x, Y \leq y] \geq P[X \leq x]P[Y \leq y]$

³ $C = (S - k)_+$

de hausse du cours des deux actifs mais en cas de baisse, la perte sera moins importante que dans le cas où il y aurait eu une hausse du cours, puisque selon le résultat empirique de l'étude, la dépendance des pertes entre l'indice du marché et le Hedge Fund est moins importante que la dépendance de la queue des gains. La différence au niveau des coefficients de dépendance traduit aussi le comportement des investisseurs des fonds alternatifs qui seraient, selon les résultats empiriques, plus sensibles aux gains et aux pertes que des investisseurs en actions de large capitalisation, par exemple, dont la dépendance de queue positive et négative est similaire selon l'étude de Malevergne et Sornette (2004).

Conclusion

Vu l'importance de l'étude de dépendance des risques extrêmes, nous avons essayé de déterminer l'approche qui conviendrait au mieux pour l'étude des dépendances des queues de distributions. Nous avons eu recours à une étude des coefficients de dépendance de queue pour les trois approches ; paramétrique, semi-paramétrique et non paramétrique. Selon l'implémentation numérique des variables suivant une loi de Student, la dépendance des queues droites et gauches est presque égale contrairement au cas de l'étude sur les données réelles pour lesquelles le coefficient de dépendance de queue droite est plus élevé que celui de la queue gauche. Concernant la qualité de l'estimation des différentes approches, l'approche semi – paramétrique paraît adéquate surtout pour l'étude de la dépendance entre l'indice de marché et le fond alternatif puisqu'elle donne des résultats qui sont proches des estimations des autres méthodes. En outre, elle se caractérise par un écart type plus faible. On peut ainsi considérer que le modèle à facteur est adéquat pour étudier la dépendance entre l'indice de marché et un actif.

Dans l'étude des variables de Student, les estimations de la dépendance de queue ont donné des résultats différents selon le degré de dépendance linéaire entre le facteur et l'actif. Dans le cas où la dépendance linéaire est faible l'approche semi-paramétrique et non paramétrique donnent des résultats homogènes. Et dans le cas où la dépendance linéaire est élevée les trois approches donnent des résultats qui concordent et dans ce cas l'approche paramétrique a une variance plus faible que la méthode basée sur le modèle à facteur.

La deuxième étude empirique conduit à des résultats confirmant l'existence d'une dépendance de queue entre le fonds alternatif le Crédit Suisse /Tremont Market Neutral et l'indice du marché le S&P500, alors que ces fonds sont caractérisés généralement par une décorrélation avec le rendement du marché. Ceci coïncide avec le résultat empirique de Denuilt et Scaillet (2004) qui ont aussi découvert une existence de dépendance entre les Hedge Funds et le S&P500, ce qui remet en question le rôle de diversification des fonds alternatifs. La caractéristique qui pourrait être attribuée à ce type de fonds selon cette étude empirique est qu'ils sont des fonds peuvent être utilisés pour des stratégies de couverture puisque la dépendance au niveau des pertes avec l'indice du marché est moins importante que la dépendance au niveau des gains. Cette asymétrie peut aussi avoir des implications au niveau des stratégies d'un investisseur pour des options sur l'actif du Hedge Fund et de l'indice de marché. Mais cet axe de recherche peut nous conduire à étudier aussi un cas de portefeuille constitué par différents fonds alternatifs, d'un benchmark et d'obligations par exemple, afin de voir l'impact de chaque actif dans le risque du portefeuille et de tester si la considération d'un autre indice de Hedge Fund donne des résultats différents de celui du CS /Tremont Market Neutral et le S&P500.

Cependant, cette étude comporte quelques limites étant donné que l'échantillon de données est petit, et que l'évaluation des performances des Hedge Funds est fondée sur des échantillons biaisés, car les bases de données ne publient que la performance des fonds alternatifs qui envoient volontairement leurs résultats. Ainsi l'absence de normes d'enregistrement uniformes rend difficile une juste appréciation de l'industrie de ces fonds.

Tab.1. Les statistiques des variables Y , les estimations des Bêtas et les dépendances.

Taille de l'échantillon		173			500			1000		
Degré de liberté	$\nu = 2.5$	$\nu = 3$	$\nu = 5$	$\nu = 2.5$	$\nu = 3$	$\nu = 5$	$\nu = 2.5$	$\nu = 3$	$\nu = 5$	
Moyenne	-0.3252	-0.3233	-0.2091	-0.0021	0.0101	-0.0192	0.0062	-0.1073	0.0016	
écart type	2.202	1.9457	1.5967	2.3421	1.8389	1.5473	2.4066	1.9159	1.6058	
Kurtosis	5.3185	9.1173	3.837	11.3542	6.08	3.7349	10.8316	7.1915	5.791	
$\hat{\beta}$	0.6649	0.6911	0.8014	0.714	0.6759	0.7072	0.6835	0.6556	0.7319208	
$\rho(X^2, \varepsilon^2)$	0.0054	0.0589	0.0535	0.0172	-0.0181	-0.0436	-0.0085	-0.0107	0.0599	
$\tau(X, \varepsilon)$	0.0688	0.0012	0.0026	0.0074	0.0103	0.0263	0.0106	0.0274	0.0096	

Tab.2. Les indices de queue selon l'estimateur de Hill pour un quantile=20%.

Taille de l'échantillon	173			500			1000		
Degré de liberté	$\nu=2.5$	$\nu=3$	$\nu=5$	$\nu=2.5$	$\nu=3$	$\nu=5$	$\nu=2.5$	$\nu=3$	$\nu=5$
Queue droite									
$\alpha(X)$	2.01	2.87	4.67	2.23	2.7	4.57	2.05	3.15	2.9
$\alpha(Y)$	2.76	2.48	4.5	2.16	3.75	4.88	2.7	2.5	2.95
	2.5	2.569	4.83	2.34	2.33	4.6	2.1	2.6	3.4
Queue gauche									
$\alpha(X)$	1.51	2.74	3.63	1.45	2.354	2.45	2.41	3.15	2.88
$\alpha(Y)$	2.02	1.46*	3.01	2.15	2.63	4.15	2.541	2.75	3.71
$\alpha(\varepsilon)$	1.38	1.6*	4.1*	1.966	2.22	5.4	2.461	2.69	3.75

* indique les valeurs pour lesquelles l'hypothèse H_0 n'est pas vérifiée au seuil de 5% avec
$$\begin{cases} H_0 : \alpha_i = \alpha_x, i = Y, \varepsilon \\ H_1 : \alpha_i \neq \alpha_x \end{cases}$$

Tab.3. Les estimations du coefficient de dépendance de queue.

Taille de l'échantillon	173			500			1000		
β	0.6649	0.6911	0.8014	0.714	0.6759	0.7072	0.6835	0.6556	0.7319
Degré de liberté	2.5	3	5	2.5	3	5	2.5	3	5
Queue droite									
Semi -paramétrique	0.0477	0.0487	0.0345	0.0584	0.06283	0.0271	0.0663	0.0329	0.0646
Paramétrique	0.578	0.4714	0.4747	0.5698	0.47783	0.4201	0.4022	0.446	0.4825
Non paramétrique									
$\hat{\Lambda}_{U,m}^{\wedge}(1,1)$	0.0353	0.0463	0.0367	0.0591	0.0541	0.0231	0.0553	0.0469	0.026
λ_U^{LOG}	0.0487	0.0495	0.0393	0.0587	0.0639	0.0254	0.0611	0.0487	0.0335
λ_U^{SEC}	0.0518	0.0653	0.0422	0.0632	0.0649	0.0254	0.0692	0.0471	0.0346
$\bar{\chi}$	1.034	0.8635	0.5243	0.9868	0.8534	0.8789	1.128	1.2734	1.302
χ	0.0567	0.0574	0.0468	0.0504	0.0544	0.0281	0.0571	0.0433	0.0277
λ	0.0477	0.0428	0.0308	0.0497	0.0523	0.0203	0.0532	0.0316	0.0184
Queue gauche									
Semi -paramétrique	0.0493	0.01792	0.0162	0.0488	0.0473	0.0195	0.0412	0.0385	0.0192
Paramétrique	0.4515	0.3449	0.3482	0.4433	0.61433	0.2936	0.2757	0.3195	0.356
Non paramétrique									
$\hat{\Lambda}_{U,m}^{\wedge}(1,1)$	0.0333	0.0217	0.0167	0.0571	0.0521	0.0211	0.0533	0.0449	0.024
λ_U^{LOG}	0.0398	0.0282	0.0232	0.0636	0.0586	0.0276	0.0598	0.0514	0.0305
λ_U^{SEC}	0.0452	0.0336	0.0297	0.0690	0.0640	0.0330	0.0652	0.0568	0.0359
$\bar{\chi}$	0.9743	0.2487*	0.318*	0.804	0.7395	0.7842	1.0346	0.9349	0.8263
χ	0.0379	0	0	0.0384	0.0314	0.01503	0.035	0.0286	0.015
λ	0.0259	0.018	0.0042	0.0264	0.0194	0.00303	0.023	0.0166	0.003

* Désigne les valeurs pour lesquelles on accepte H_0 au seuil de 5% tel que : $\begin{cases} H_0 : \bar{\chi} = 1 \\ H_1 : \bar{\chi} \neq 1 \end{cases}$

Tab.4. Les estimations du coefficient de dépendance de queue.

Taille de l'échantillon	173				500			1000	
β	2.57	2.52	2.55	2.518	2.498	2.527	2.504	2.486	2.533
Degré de liberté	2.5	3	5	2.5	3	5	2.5	3	5
Queue droite									
Semi -paramétrique	0.5786	0.6602	0.9056	0.5422	0.6712	0.9052	0.5208	0.6631	0.8248
Paramétrique	0.8911	0.8883	0.8939	0.8903	0.8876	0.8770	0.8607	0.8799	0.8885
Non paramétrique									
$\hat{\Lambda}_{U,m}^{\wedge}(1,1)$	0.9682	0.6549	0.7574	0.7690	0.7652	0.7649	0.8053	0.7523	0.6553
λ_U^{LOG}	0.7543	0.6254	0.7166	0.7543	0.7233	0.6342	0.7543	0.6543	0.7698
λ_U^{SEC}	0.9131	0.9103	0.9159	0.9123	0.9096	0.8990	0.8827	0.9019	0.9105
$\bar{\chi}$	1.1083	0.9488	0.7536	0.938	0.8735	0.9182	1.1686	1.0689	0.9603
χ	0.7421	0.8237	0.769	0.7057	0.8346	0.868	0.6842	0.8265	0.9883
λ	0.6016	0.8737	0.8823	0.7651	0.8965	0.7954	0.8243	0.8527	0.8421
Queue gauche									
Semi -paramétrique	0.5533	0.6349	0.8802	0.5169	0.6965	0.9305	0.5461	0.6884	0.8502
Paramétrique	0.7646	0.7618	0.7674	0.7638	0.9241	0.7505	0.7342	0.7534	0.7620
Non paramétrique									
$\hat{\Lambda}_{U,m}^{\wedge}(1,1)$	0.9662	0.6529	0.7374	0.7670	0.7632	0.7629	0.8033	0.7503	0.6533
λ_U^{LOG}	0.9727	0.6594	0.7440	0.7736	0.7698	0.7694	0.8098	0.7568	0.6598
λ_U^{SEC}	0.9782	0.6649	0.7505	0.7790	0.7752	0.7749	0.8152	0.7623	0.6652
$\bar{\chi}$	1.1577	0.6480	0.9872	1.1105	0.9771	1.0026	1.2517	1.0963	0.9873
χ	0.9719	0.7093	0.8039	0.7797	0.7793	0.8197	0.7249	0.7560	0.6589
λ	0.8016	0.7748	0.6251	0.7543	0.8453	0.746	0.6924	0.7341	0.8752

Tab.5 : Estimation des écarts types et des moyennes des coefficients de dépendance de queue pour les deux tailles 173 et 1000.

Taille de l'échantillon	173						1000					
$\hat{\beta}$	2.57		2.52		2.55		2.504		2.486		2.533	
Degré de liberté	$\nu = 2.5$		$\nu = 3$		$\nu = 5$		$\nu = 2.5$		$\nu = 3$		$\nu = 5$	
	$\hat{\lambda}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\sigma}$
Queue droite												
Semi -paramétrique	0.5714	0.3998	0.6796	0.3587	0.9184	0.3786	0.5336	0.3972	0.6759	0.3218	0.8376	0.3417
Paramétrique	0.9058	0.2214	0.869	0.2309	0.8812	0.2523	0.848	0.2194	0.8672	0.194	0.8758	0.2153
Non paramétrique												
$\hat{\Lambda}_{U,m}(1,1)$	0.9809	0.2022	0.6356	0.1917	0.7721	0.2156	0.818	0.1995	0.7717	0.1748	0.6747	0.1987
λ_U^{LOG}	0.7416	0.1719	0.6449	0.1435	0.702	0.1854	0.735	0.1683	0.6397	0.1174	0.7551	0.1593
λ_U^{SEC}	0.9024	0.2204	0.894	0.1919	0.9013	0.2338	0.9021	0.2164	0.8873	0.165	0.8958	0.2069
$\bar{\chi}$	1.0956	0.1532	0.9294	0.1327	0.739	0.1666	1.1833	0.1505	1.0495	0.106	0.975	0.1398
χ	0.7094	0.1021	0.8043	0.0916	0.9073	0.1155	0.6679	0.0984	0.8119	0.064	0.9737	0.0879
Queue gauche												
Semi -paramétrique	0.5173	0.1313	0.6225	0.1577	0.893	0.1775	0.5589	0.1294	0.6761	0.1208	0.863	0.1406
Paramétrique	0.7505	0.2301	0.7425	0.25	0.7547	0.2713	0.7215	0.2275	0.7662	0.2145	0.7748	0.2359
Non paramétrique												
$\hat{\Lambda}_{U,m}(1,1)$	0.9501	0.1255	0.6396	0.1389	0.7503	0.1389	0.8161	0.1235	0.7631	0.1143	0.6661	0.1143
λ_U^{LOG}	0.9888	0.1509	0.6401	0.1643	0.7313	0.1743	0.7938	0.1478	0.7408	0.1397	0.6438	0.1498
λ_U^{SEC}	0.9621	0.2091	0.6506	0.229	0.7633	0.2291	0.8009	0.1627	0.748	0.2044	0.6509	0.2045
$\bar{\chi}$	1.1417	0.1419	0.6303	0.1618	0.8034	0.1554	1.2371	0.1393	1.0786	0.132	0.9696	0.1256
χ	0.9558	0.0908	0.69	0.071	0.8167	0.1043	0.7377	0.0644	0.7688	0.0541	0.6717	0.0874

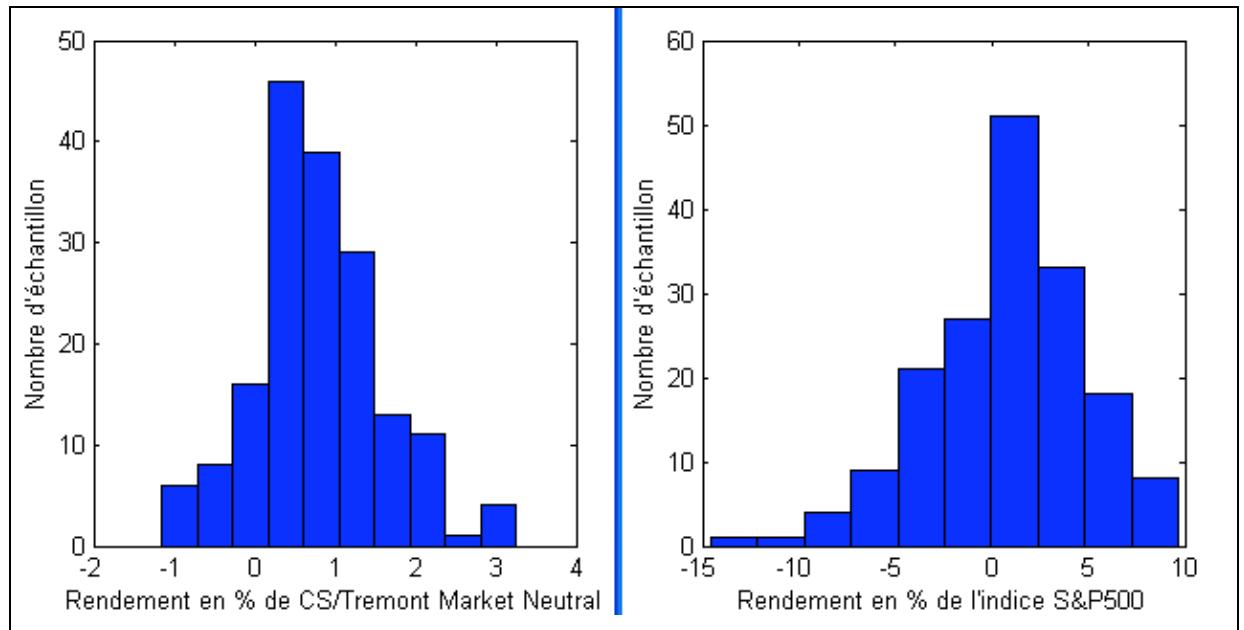


Fig.1. Répartition des rendements des deux actifs

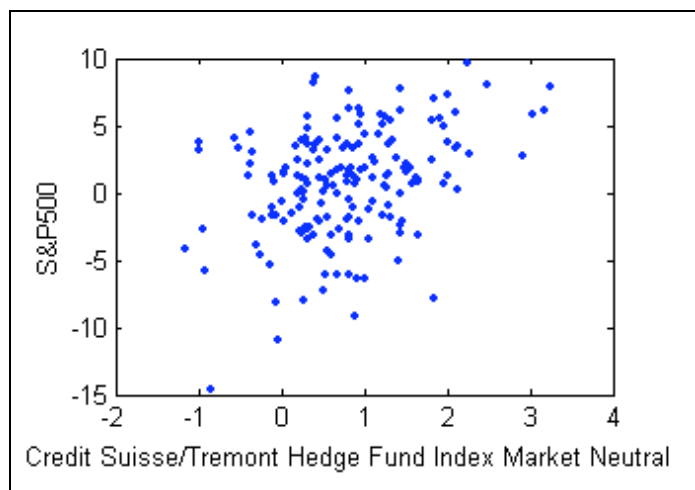


Fig.2. Représentation bvariée des données

Tab.7. Les estimateurs de Hill

Queue droite	
$\alpha(X)$	4.16
$\alpha(Y)$	4.532
$\alpha(\varepsilon)$	3.14
Queue gauche	
$\alpha(X)$	1.878
$\alpha(Y)$	1.65
$\alpha(\varepsilon)$	2.28

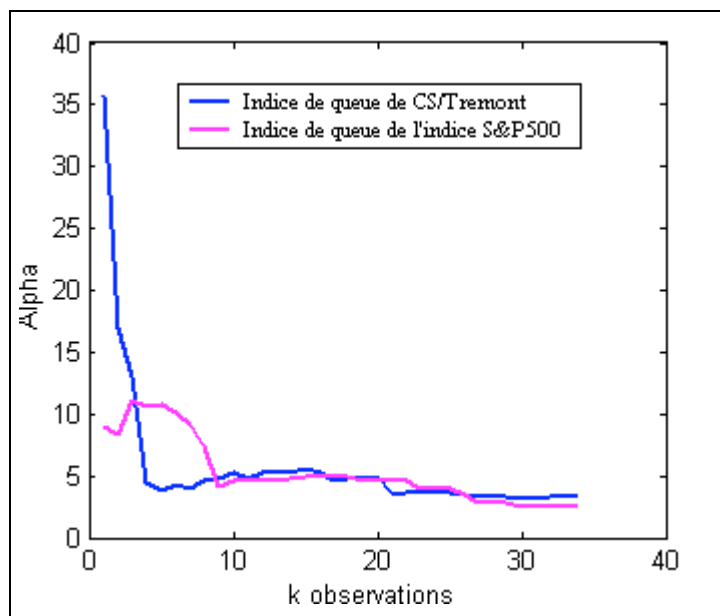


Fig.3. Les indices des queues droites des deux actifs au quantile 20%.

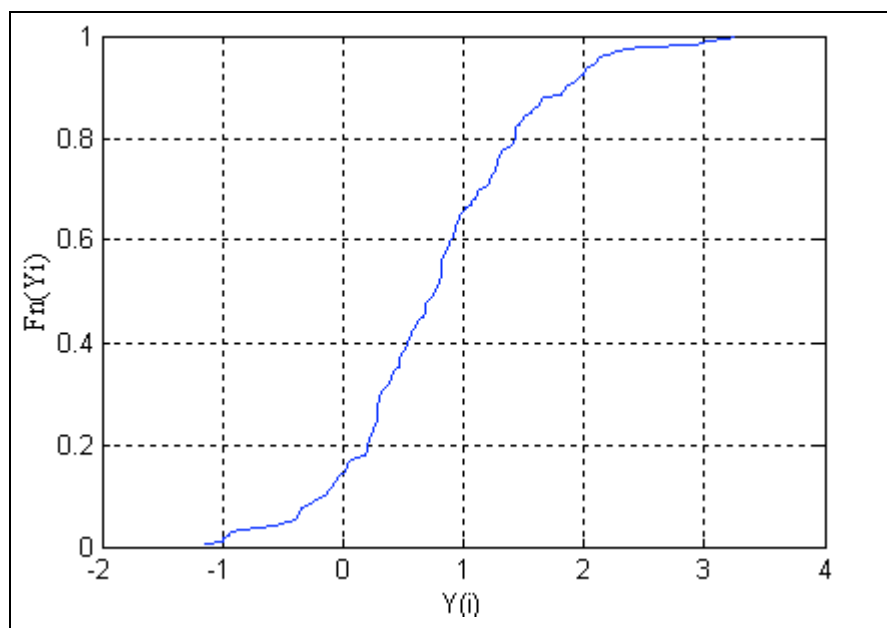
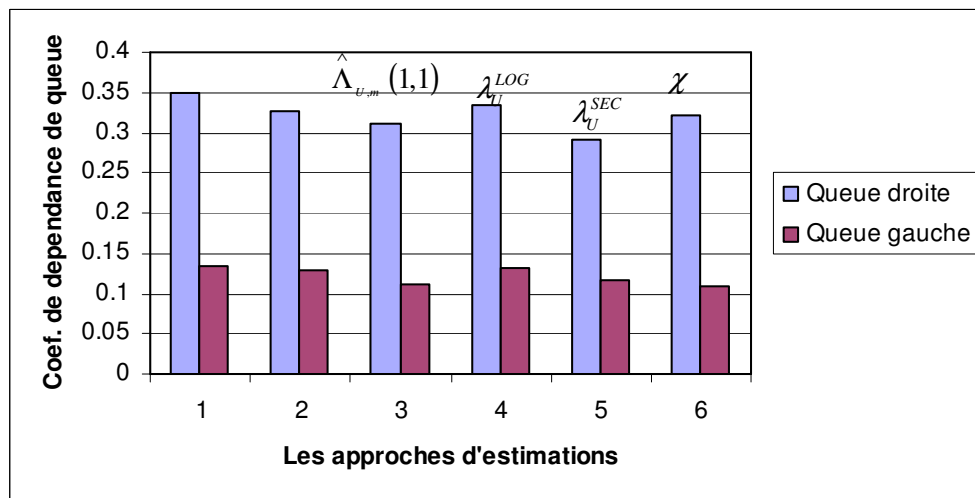


Fig.4. Fonction de répartition empirique de Credit Suisse/Tremont Hedge Fund Index Equity Market Neutral.

Tab.8. Estimations des coefficients de dépendance de queue et leurs écarts type.

méthode d'estimation	Queue droite			Queue gauche		
	λ	$\hat{\lambda}$	$\hat{\sigma}$	λ	$\hat{\lambda}$	$\hat{\sigma}$
Semi paramétrique	0.3484	0.3514	0.0986	0.1334	0.1298	0.0742
Paramétrique	0.3261	0.3281	0.1974	0.1302	0.1326	0.1866
Non paramétrique						
$\hat{\Lambda}_{U,m}(1,1)$	0.311	0.3344	0.1582	0.1111	0.1073	0.1475
λ_U^{SEC}	0.3352	0.3472	0.1764	0.1314	0.1382	0.1541
λ_U^{LOG}	0.2917	0.2807	0.1279	0.1158	0.1203	0.1196
$\bar{\chi}$	1.7659*	1.7667	0.1092	0.8563*	0.8394	0.1364
χ	0.3224	0.3123	0.1181	0.1095	0.1126	0.1612

*Désigne les valeurs pour lesquelles on accepte H_0 au seuil 5% tel que : $\begin{cases} H_0 : \bar{\chi} = 1 \\ H_1 : \bar{\chi} \neq 1 \end{cases}$



- 1 : Approche semi paramétrique
2 : Approche paramétrique

Fig.5 Coefficient de dépendance pour les deux queues de distribution du fond alternatif et le S&P500

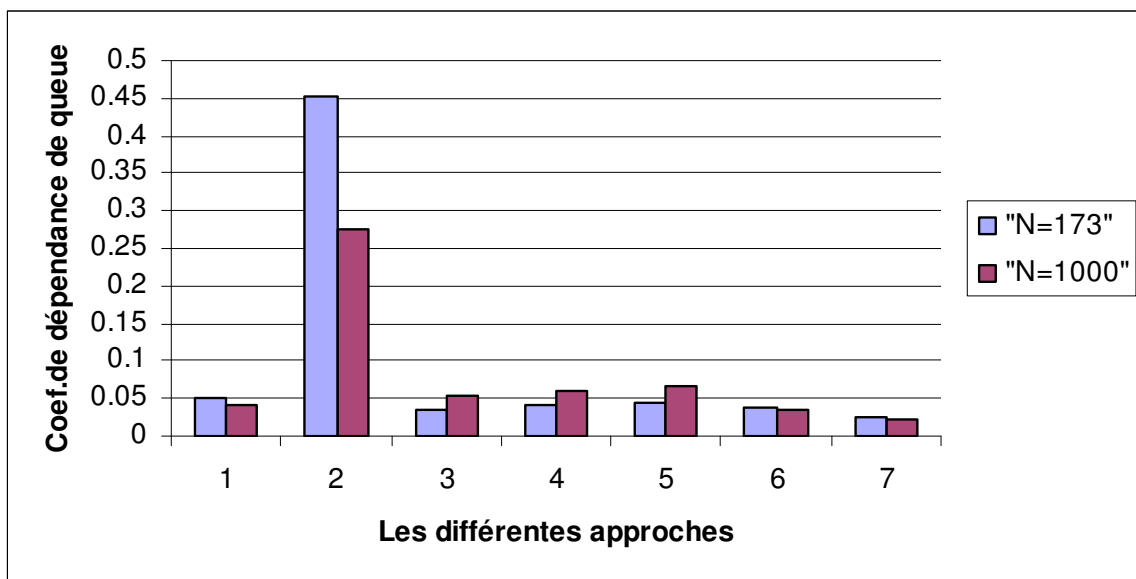


Fig.6 Coefficient de dépendance de queue gauche : bêta faible (ca. 0.7)

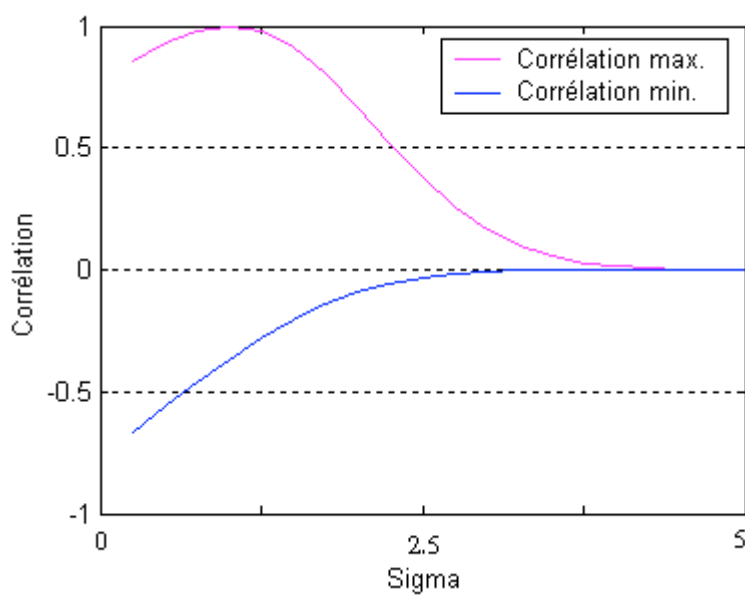


Fig. a : Graphe de ρ_{\min} et ρ_{\max} en fonction de σ pour deux variables aléatoires dont les marginales sont lognormale $\log N(0,1)$ et $\log N(0,\sigma^2)$

Bibliographie

- Bortot, P., Coles, S. G., and Tawn, J. A. (2000). The multivariate Gaussian Tail model: An application to Oceanographic data. *Applied Statistics* **49**, 31-49.
- Campbell, R., Koedijk, K. & Kofman, P. (2002). Increased correlation in bear markets. *Financial Analysts Journal* **Jan-Feb**, 87-94.
- Coles, S.G., Heffernan, J., and Tawn, J.A. (1999). Dependence measures for extreme value analyses. *Extremes* **3**, 5-38.
- de Haan, L. & Stadtmüller, U. (1996). Generalized regular variation of second order. *J. Aust. Math. Soc.* **61**, 381-395.
- Denuit, M. and Scaillet, O. (2004). Non parametric tests for positive quadrant dependence. *Journal of Financial Econometrics* **2**, 422-450.
- Embrechts, P., Mc Neil, A. J., and Strauman, D. (1999). Correlation: Pitfalls and Alternatives. *Risk* **12**(32), 69-71
- Frahm, G., Junker, M. & Schmidt, R. (2005). Estimating the tail-dependence coefficient: Properties and Pit-falls. *Insurance: Mathematics and Economics*. **37**, 80-100.
- Genest, C., Ghouli, K., Rivest, L.-P. (1995). A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions. *Biometrika* **82**, 543–552.
- Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman & Hall, London
- Juri, A., Wüthrich, M.V. (2002). Copula convergence theorems for tail events. *Insurance: Mathematics and Economics* **24**, 139–148.
- Karolyi, G. & Stulz, R. (1996). Why do markets move together? An investigation of U.S.-Japan stock return comovements. *The Journal of Finance* **51**(30), 951-989.
- Ledford, A. and Tawn, J. A. (1996). Statistics for near independence in multivariate extreme values. *Biometrika* **83**, 169-187.
- Ledford, A. and Tawn, J. A. (1998). Concomitant tail behaviour for extremes. *Advances in applied Probability* **30**, 197-215.
- Lintner, J. (1965). The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and the capital budgets. *Review of Economics and Statistics* **41**, 13-37.
- Longin, F. M. (2000). From value at risk to stress testing: The extreme value approach. *Journal of Banking and Finance* **24**, 1097-1130.
- Longin, F. M. and Solnik, B. (2001). Extreme correlation of international equity markets. *Journal of Finance* **56**, 649-676.

Malevergne , Y. and Sornette, D. (2002). Minimising extremes. *Risk*, **15**(11), 129-34.

Malevergne , Y. and Sornette, D. (2004). How to account for extreme co-movements between individual stock and the market. *Journal of Risk* **6**(30), 71-116.

Malevergne, Y. and Sornette, D. (2005). *Extreme Financial Risks*. Springer-Verlag, London.

Mossin, J. (1966). Equilibrium in capital asset market. *Econometrica* **35**, 768-83.

Patton, J. A. (2001). Estimation of multivariate models for time series of possibly different lengths. Working Paper. University of California, Economics Discussion Paper 2001-17.

Poon, S. H., Rockinger, M. and Tawn, J. (2004). Extreme-value dependence in financial markets: Diagnostics, models and financial implications. *Review of Financial Studies* **17**, 581-610.

Resnick, S. I. (1987). *Extreme values, regular variation and point process*. Springer, New York.

Ross, S. A. (1976). The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory* **17**, 254-86.

Roll, R. (1988). The international crash of October 1987. *Financial Analysts Journal* **44**(32), 19-35.

Schmidt, R., Stadtmüller, U. (2006). Non parametric estimation of tail dependence. *The Scandinavian Journal of Statistics*. **33**, 307-335.

Schweizer, B. and Wolff, E. F. (1981). Non parametric measures of dependence for random variables. *Annals of Statistics* **9**, 870–885.

Sharpe, W. (1964). Capital assets prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance* **19**, 425-442.

Sklar, A. (1959). Fonction de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publication de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris* **8**, 229-231.